MAI-PRE-0004-B
O Marchais
Le 30/10/2020

MANIPULATION DES TORSEURS

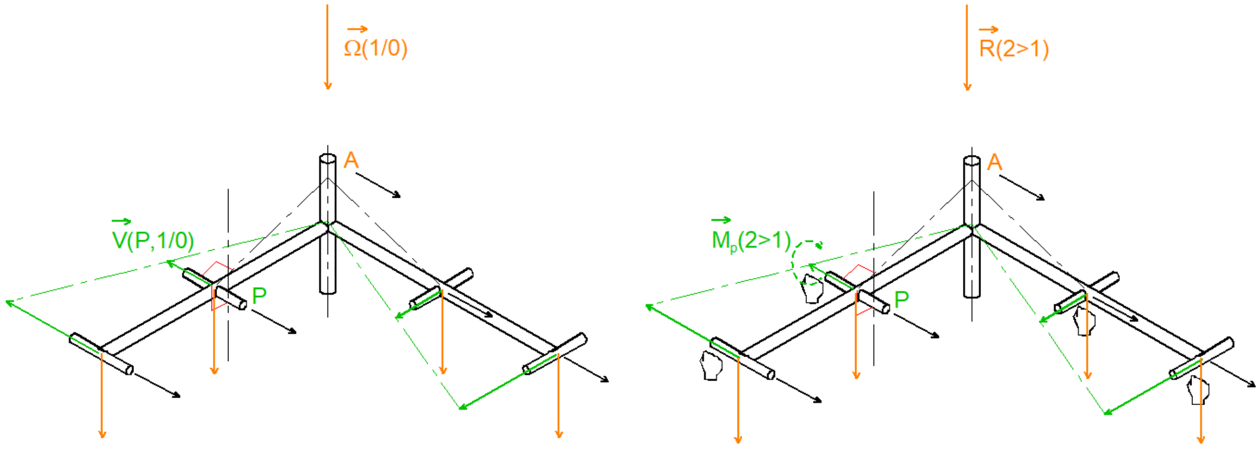
pour la modélisation d'un mouvement ou d'une action

Table des matières

1 Préambule

Le torseur est un outil mathématique adapté à la modélisation des mouvements et des actions mécaniques car il permet de calculer facilement dans l'espace :

- la vitesse d'un point due à la vitesse de rotation d'un solide
- l'effet « tordre » du à une action de type « pousser »



$\vec{V}(P,1/0) = \vec{\Omega}(1/0) \wedge \vec{AP} + \vec{V}(A,1/0)$

$\vec{M}_p(2>1) = \vec{R}(2>1) \wedge \vec{AP} + \vec{M}_A(2>1)$

La manipulation des torseurs fait intervenir l'utilisation d'un opérateur mathématique qui est le produit vectoriel de deux vecteurs.

2 Produit vectoriel de deux vecteurs

2.1 Définition

soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de dimension 3. On appelle le produit $\vec{u}$ vectoriel $\vec{v}$:

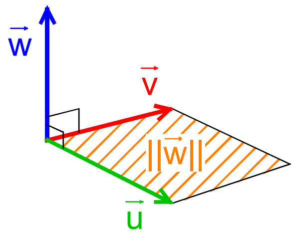
$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que

$\vec{w} \perp \vec{u}$ et

$\vec{w} \perp \vec{v}$ et

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ direct et

$\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$



2.2 Propriétés

Soit $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère orthonormé direct : $\vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{z}$; $\vec{y} \wedge \vec{z} = \vec{x}$; $\vec{z} \wedge \vec{x} = \vec{y}$

$\forall \vec{u}$: $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$

anti-commutativité : $\forall \vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$

non associativité : $\vec{x} \wedge (\vec{x} \wedge \vec{y}) = \vec{x} \wedge \vec{z} = -\vec{y}$ alors que $(\vec{x} \wedge \vec{x}) \wedge \vec{y} = \vec{0} \wedge \vec{y} = \vec{0}$

distributivité par rapport à + : $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \wedge \vec{w}) + (\vec{v} \wedge \vec{w})$

2.3 Calcul manuel

Soient $\vec{u}:\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}:\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$

$$\vec{u}\wedge\vec{v}:\begin{pmatrix} b\times f-c\times e \\ c\times d-a\times f \\ a\times e-b\times d \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} b & e \\ c & f \end{vmatrix}\vec{x}+\begin{vmatrix} c & f \\ a & d \end{vmatrix}\vec{y}+\begin{vmatrix} a & d \\ b & e \end{vmatrix}\vec{z}$$

Le déterminant $\begin{vmatrix} b & e \\ c & f \end{vmatrix}$
se calcule par
le produit de la diagonale descendante $b\times f$
moins le produit de la diagonale montante $c\times e$

2.4 Utilisation de la calculatrice

Le programme PROVEC va calculer les coordonnées du vecteur $\vec{w}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Les coordonnées de $\vec{u}$ sont notées X,Y & Z, celles de $\vec{v}$ sont notées X_{AB},Y_{AB} & Z_{AB}

Version CASIO 35+

Programme

```
======PROVEC
"X="?→X↵
"Y="?→Y↵
"Z="?→Z↵
"XAB="?→U↵
"YAB="?→V↵
"ZAB="?→W↵
Y×W-Z×V◢
Z×U-X×W◢
X×V-Y×U
```

Exécution

```
X=?
183
Y=?
-42
Z=?
0
XAB=?
50
YAB=?
86.6
ZAB=?
0
                  0
                  0
            17947.8
```

Version Ti 82

Programme

```
PROGRAM:PROVEC
:Input "X ?",X
:Input "Y ?",Y
:Input "Z ?",Z
:Input "XAB?",U
:Input "YAB?",V
:Input "ZAB?",W
:Disp Y*W-Z*V
:Disp Z*U-X*W
:Disp X*V-U*Y
```

Exécution

```
prgmPROVEC
X ?183
Y ?-42
Z ?0
XAB?50
YAB?86.6
ZAB?0
                  0
                  0
            17947.8
               Done
```

3 Propriétés mathématiques des Torseurs

3.1 Définition

Le torseur $\{T\}$ est un ensemble de deux vecteurs :
Le vecteur résultante $\vec{R}$, constant en tout point, est utilisé pour représenter la vitesse de rotation du mouvement d'un solide ou la composante « pousser » d'une action mécanique.
Le vecteur moment $\vec{M}_A$, variable en fonction du point A, est utilisé pour représenter la vitesse du point A ou l'effet «tordre» en A de l'action mécanique.

On note $\{T\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix}$ et pour $\vec{R} : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ et $\vec{M}_A : \begin{pmatrix} L_A \\ M_A \\ N_A \end{pmatrix}$ $\{T\} = {}_A\begin{Bmatrix} X & L_A \\ Y & M_A \\ Z & N_A \end{Bmatrix}$

3.2 Changement de point

Les études de cinématique ou de statique débouchent sur le problème suivant :
connaissant le torseur représentant le mouvement ou l'action mécanique en un point A, on souhaite le connaître en un point B.
Le vecteur résultante est le même en A et en B.
Pour calculer le vecteur moment, on utilise la formule dite « formule du moment ».

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{R} \wedge \vec{AB}$$

On a donc :

$$\{T\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_B \end{Bmatrix} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_A + \vec{R} \wedge \vec{AB} \end{Bmatrix}$$

En cinématique :

$$\{2/1\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{w}(2/1) \\ \vec{V}(A,2/1) \end{Bmatrix} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{w}(2/1) \\ \vec{V}(B,2/1) \end{Bmatrix} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{w}(2/1) \\ \vec{V}(A,2/1) + \vec{w}(2/1) \wedge \vec{AB} \end{Bmatrix}$$

En statique :

$$\{2 \rightarrow 1\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}(2 \rightarrow 1) \\ \vec{M}_A(2 \rightarrow 1) \end{Bmatrix} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{R}(2 \rightarrow 1) \\ \vec{M}_B(2 \rightarrow 1) \end{Bmatrix} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{R}(2 \rightarrow 1) \\ \vec{M}_A(2 \rightarrow 1) + \vec{R}(2 \rightarrow 1) \wedge \vec{AB} \end{Bmatrix}$$

3.2.1 Calcul manuel

En cinématique, le mouvement de 2 par rapport à 1 étant modélisé par $\{2/1\}$ connu au point A, on cherche son expression en B :

$$\vec{V}(A,2/1):\begin{pmatrix} vx(A,2/1) \\ vy(A,2/1) \\ vz(A,2/1) \end{pmatrix} \quad \vec{w}(2/1):\begin{pmatrix} wx(2/1) \\ wy(2/1) \\ wz(2/1) \end{pmatrix} \quad \vec{AB}:\begin{pmatrix} X_{AB} \\ Y_{AB} \\ Z_{AB} \end{pmatrix}$$

$$\{2/1\}= {}_A\begin{Bmatrix} wx(2/1) & vx(A,2/1) \\ wy(2/1) & vy(A,2/1) \\ wz(2/1) & vz(A,2/1) \end{Bmatrix} = {}_B\begin{Bmatrix} wx(2/1) & vx(B,2/1) \\ wy(2/1) & vy(B,2/1) \\ wz(2/1) & vz(B,2/1) \end{Bmatrix}$$

$$= {}_B\begin{Bmatrix} wx(2/1) & vx(A,2/1)+(wy(2/1)\times Z_{AB}-wz(2/1)\times Y_{AB}) \\ wy(2/1) & vy(A,2/1)+(wz(2/1)\times X_{AB}-wx(2/1)\times Z_{AB}) \\ wz(2/1) & vz(A,2/1)+(wx(2/1)\times Y_{AB}-wy(2/1)\times X_{AB}) \end{Bmatrix}$$

En statique, l'action de 2 sur 1 étant modélisée par $\{2\rightarrow 1\}$ connu au point A, on cherche son expression en B :

$$\vec{M}_A(2\rightarrow 1):\begin{pmatrix} L_A(2\rightarrow 1) \\ M_A(2\rightarrow 1) \\ N_A(2\rightarrow 1) \end{pmatrix} \quad \vec{R}(2\rightarrow 1):\begin{pmatrix} X(2\rightarrow 1) \\ Y(2\rightarrow 1) \\ Z(2\rightarrow 1) \end{pmatrix} \quad \vec{AB}:\begin{pmatrix} X_{AB} \\ Y_{AB} \\ Z_{AB} \end{pmatrix}$$

$$\{2\rightarrow 1\}= {}_A\begin{Bmatrix} X(2\rightarrow 1) & L_A(2\rightarrow 1) \\ Y(2\rightarrow 1) & M_A(2\rightarrow 1) \\ Z(2\rightarrow 1) & N_A(2\rightarrow 1) \end{Bmatrix} = {}_B\begin{Bmatrix} X(2\rightarrow 1) & L_B(2\rightarrow 1) \\ Y(2\rightarrow 1) & M_B(2\rightarrow 1) \\ Z(2\rightarrow 1) & N_B(2\rightarrow 1) \end{Bmatrix}$$

$$= {}_B\begin{Bmatrix} X(2\rightarrow 1) & L_A(2\rightarrow 1)+(Y(2\rightarrow 1)\times Z_{AB}-Z(2\rightarrow 1)\times Y_{AB}) \\ Y(2\rightarrow 1) & M_A(2\rightarrow 1)+(Z(2\rightarrow 1)\times X_{AB}-X(2\rightarrow 1)\times Z_{AB}) \\ Z(2\rightarrow 1) & N_A(2\rightarrow 1)+(X(2\rightarrow 1)\times Y_{AB}-Y(2\rightarrow 1)\times X_{AB}) \end{Bmatrix}$$

3.2.2 Utilisation de la calculatrice

En cinématique, le programme MOMCIN va calculer les coordonnées de la vitesse $\vec{V}(B,1/2)$ en fonction de la vitesse $\vec{V}(A,1/2)$ de $\vec{w}(1/2)$ et du vecteur $\vec{AB}$.

Version CASIO 35+

Programme

```
======MOMCIN======
"VECTEUR AB ?"↵
"XAB="?→U↵
"YAB="?→V↵
"ZAB="?→W↵
ClrText↵
Locate 1,1,"MOMENT CINEMATIQUE :"↵
Locate 1,2,"VBX = VAX+"↵
Locate 4,3,W↵
Locate 10,3,"WY+"↵
Locate 14,3,-V↵
Locate 20,3,"WZ"↵
Locate 1,4,"VBY = VAY+"↵
Locate 4,5,U↵
Locate 10,5,"WZ+"↵
Locate 14,5,-W↵
Locate 20,5,"WX"↵
Locate 1,6,"VBZ = VAZ+"↵
Locate 4,7,V↵
Locate 10,7,"WX+"↵
Locate 14,7,-U↵
Locate 20,7,"WY"↵
```

Exécution

```
VECTEUR AB ?
XAB=?
-50
YAB=?
-86.6
ZAB=?
0
```

```
MOMENT CINEMATIQUE :
VBX = VAX +
   0      WY+ 86.6   WZ
VBY = VAY +
   -50    WZ+ 0      WX
VBZ = VAZ +
   -86.6 WX+ 50      WY
```

Version Ti 82

Programme

```
PROGRAM:MOMCIN
:ClrHome
:Disp "VECTEUR AB ?"
:Input "XAB:",U
:Input "YAB:",V
:Input "ZAB:",W
:ClrHome
:Output(1,1,"MOM' CINEMATIQUE :")
:Output(2,1,"VBX = VAX +")
:Output(3,2,W)
:Output(3,7,"WY+")
:Output(3,10,-V)
:Output(3,15,"WZ")
:Output(4,1,"VBY = VAY +")
:Output(5,2,U)
:Output(5,7,"WZ+")
:Output(5,10,-W)
:Output(5,15,"WX")
:Output(6,1,"VBZ = VAZ +")
:Output(7,2,V)
:Output(7,7,"WX+")
:Output(7,10,-U)
:Output(7,15,"WY")
```

Exécution

```
VECTEUR AB ?
XAB:-50
YAB:-86.6
ZAB:0
```

```
MOM' CINEMATIQUE
VBX = VAX +
 0     WY+86.6 WZ
VBY = VAY +
 -50   WZ+0    WX
VBZ = VAZ +
 -86.6WX+50    WY
```

En statique, le programme MOMSTA va calculer les coordonnées du moment $\vec{M}_B(2\rightarrow 1)$ en fonction de $\vec{M}_A(2\rightarrow 1)$,de la résultante $\vec{R}(2\rightarrow 1)$ et du vecteur $\vec{AB}$.

Version CASIO 35+

Programme

```
======MOMSTA======
"VECTEUR AB ?"↵
"XAB="?→U↵
"YAB="?→V↵
"ZAB="?→W↵
ClrText↵
Locate 1,1,"MOMENT STATIQUE :"↵
Locate 1,2,"LB = LA +"↵
Locate 4,3,W↵
Locate 10,3,"Y +"↵
Locate 14,3,-V↵
Locate 21,3,"Z"↵
Locate 1,4,"MB = MA +"↵
Locate 4,5,U↵
Locate 10,5,"Z +"↵
Locate 14,5,-W↵
Locate 21,5,"X"↵
Locate 1,6,"NB = NA +"↵
Locate 4,7,V↵
Locate 10,7,"X +"↵
Locate 14,7,-U↵
Locate 21,7,"Y"↵
```

Exécution

```
VECTEUR AB ?
XAB=?
50
YAB=?
86.6
ZAB=?
0
```

```
MOMENT STATIQUE :
LB = LA +
   0      Y + -86.6   Z
MB = MA +
   50     Z + 0       X
NB = NA +
   86.6   X + -50     Y
```

Version Ti 82

Programme

```
PROGRAM:MOMSTA
:ClrHome
:Disp "VECTEUR AB ?"
:Input "XAB:",U
:Input "YAB:",V
:Input "ZAB:",W
:ClrHome
:Output(1,1,"MOMENT STATIQUE :")
:Output(2,1,"LB = LA +")
:Output(3,2,W)
:Output(3,7,"Y +")
:Output(3,11,-V)
:Output(3,16,"Z")
:Output(4,1,"MB = MA +")
:Output(5,2,U)
:Output(5,7,"Z +")
:Output(5,11,-W)
:Output(5,16,"X")
:Output(6,1,"NB = NA +")
:Output(7,2,V)
:Output(7,7,"X +")
:Output(7,11,-U)
:Output(7,16,"Y")
```

Exécution

```
VECTEUR AB ?
XAB:50
YAB:86.6
ZAB:0
```

```
MOMENT STATIQUE
LB = LA +
 0    Y + -86.6Z
MB = MA +
 50   Z + 0    X
NB = NA +
 86.6 X + -50  Y
```

3.3 Somme de torseurs

3.3.1 Torseur nul

Le torseur nul a un vecteur résultante nul et un vecteur moment nul en un point A quelconque. S'il est nul en un point, il est nul en tout point.

$$\left\{0\right\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}$$

3.3.2 Somme de 2 torseurs

La somme de deux torseurs a pour résultante la somme des résultantes et pour moment en A la somme des moments en A. Les 2 torseurs doivent donc être exprimés au même point pour effectuer la somme.

$$\left\{T\right\}+\left\{U\right\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\vec{R}\\ \vec{M}_A\end{matrix}\right\} + {}_A\left\{\begin{matrix}\vec{S}\\ \vec{N}_A\end{matrix}\right\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\vec{R}+\vec{S}\\ \vec{M}_A+\vec{N}_A\end{matrix}\right\}$$

3.3.3 Utilisation en cinématique

Dans une étude cinématique, on effectue la somme des torseurs des mouvements des solides pour effecteur la fermeture cinématique du mécanisme.

$$\left\{3/2\right\}+\left\{2/1\right\}+\left\{1/3\right\}=\left\{0\right\}$$

Cette équation de torseurs se traduit par un système de 6 équations scalaires :

$$\begin{aligned}
wx(3/2)+wx(2/1)+wx(1/3)&=0\\
wy(3/2)+wy(2/1)+wy(1/3)&=0\\
wz(3/2)+wz(2/1)+wz(1/3)&=0\\
vx(A,3/2)+vx(A,2/1)+vx(A,1/3)&=0\\
vy(A,3/2)+vy(A,2/1)+vy(A,1/3)&=0\\
vz(A,3/2)+vz(A,2/1)+vz(A,1/3)&=0
\end{aligned}$$

La résolution de ce système permet de déterminer les composantes inconnues des mouvements en fonction des composantes connues.

3.3.4 Utilisation en statique

Dans une étude statique, on effectue la somme des torseurs des actions mécaniques qui s'appliquent sur un solide pour vérifier l'équilibre de celui-ci.

$$\left\{4\rightarrow 1\right\}+\left\{3\rightarrow 1\right\}+\left\{2\rightarrow 1\right\}=\left\{0\right\}$$

Cette équation de torseurs se traduit par un système de 6 équations scalaires :

$$\begin{aligned}
X(4\rightarrow 1)+X(3\rightarrow 1)+X(2\rightarrow 1)&=0\\
Y(4\rightarrow 1)+Y(3\rightarrow 1)+Y(2\rightarrow 1)&=0\\
Z(4\rightarrow 1)+Z(3\rightarrow 1)+Z(2\rightarrow 1)&=0\\
L_A(4\rightarrow 1)+L_A(3\rightarrow 1)+L_A(2\rightarrow 1)&=0\\
M_A(4\rightarrow 1)+M_A(3\rightarrow 1)+M_A(2\rightarrow 1)&=0\\
N_A(4\rightarrow 1)+N_A(3\rightarrow 1)+N_A(2\rightarrow 1)&=0
\end{aligned}$$

La résolution de ce système permet de déterminer les composantes inconnues des actions en fonction des composantes connues.

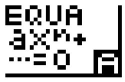
A noter qu'on ne peut résoudre le système que s'il y a au plus 6 inconnues !

3.3.5 Résolution des systèmes d'équations

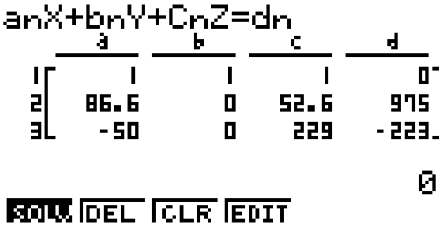
Un tel système d'équations linéaires peut se résoudre à la main (système simple) ou grâce à la calculatrice (système complexe).

Version CASIO 35+

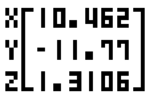
Utiliser le menu « EQUA »



Remplir le tableau des coefficients

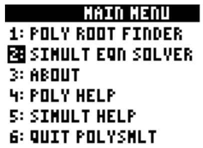


Obtenir le résultat

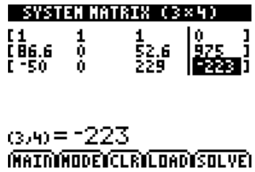


Version Ti 82

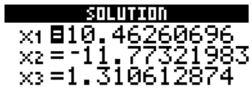
Utiliser l'application « Simult »



Remplir le tableau des coefficients



Obtenir le résultat



3.4 Torseurs particuliers

3.4.1 Torseur couple

C'est un torseur de résultante nulle. Le moment est alors le même en tout point.
En cinématique, il modélise un mouvement de translation (champ uniforme des vitesses).
En statique, il modélise une action de type « tordre » pure (couple moteur ou récepteur).

$$\{C\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ \vec{M}_A\end{matrix}\right\} = {}_B\left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ \vec{M}_B\end{matrix}\right\} \quad \text{avec } \vec{M}_A = \vec{M}_B, \forall A \text{ et } B$$

3.4.2 Torseur glisseur

C'est un torseur de moment nul en un point.
En cinématique, il modélise un mouvement de rotation d'axe fixe (vitesse nulle sur l'axe).
En statique, il modélise une action de type « pousser » (force).

$$\{G\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\vec{R}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\} = {}_B\left\{\begin{matrix}\vec{R}\\ \vec{M}_B\end{matrix}\right\}$$

L'axe du glisseur est l'ensemble des points de l'espace où le moment du glisseur est nul.
En cinématique, c'est l'axe de rotation.
En statique, c'est la droite d'action.

$$\text{Droite } (A, \vec{R}) \text{ telle que } \forall B \in (A, \vec{R}), \vec{M}_A = \vec{M}_B = \vec{0}$$