MAI-PRE-0021-D
O Marchais
Le 15/03/2021

PUISSANCES ET ÉNERGIES DANS UN MÉCANISME

Table des matières

1 Puissance d'une action mécanique

1.1 Définition

Soit une action mécanique quelconque T→S. Elle est définie par le torseur :

$$\{T\rightarrow S\}=_A\{\vec{R}(T\rightarrow S);\vec{M}_A(T\rightarrow S)\}$$

Si S est en mouvement par rapport à R galiléen. Ce mouvement est défini par le torseur :

$$\{S/R\}=_A\{\vec{\Omega}(S/R);\vec{V}(A,S/R)\}$$

Définition : la puissance P(T→S) de l'action T→S est une quantité scalaire :

$$P(T\rightarrow S)=\vec{R}(T\rightarrow S).\vec{V}(A,S/R)+\vec{M}_A(T\rightarrow S).\vec{\Omega}(S/R)$$

C'est le co-moment des deux torseurs de l'action et du mouvement :

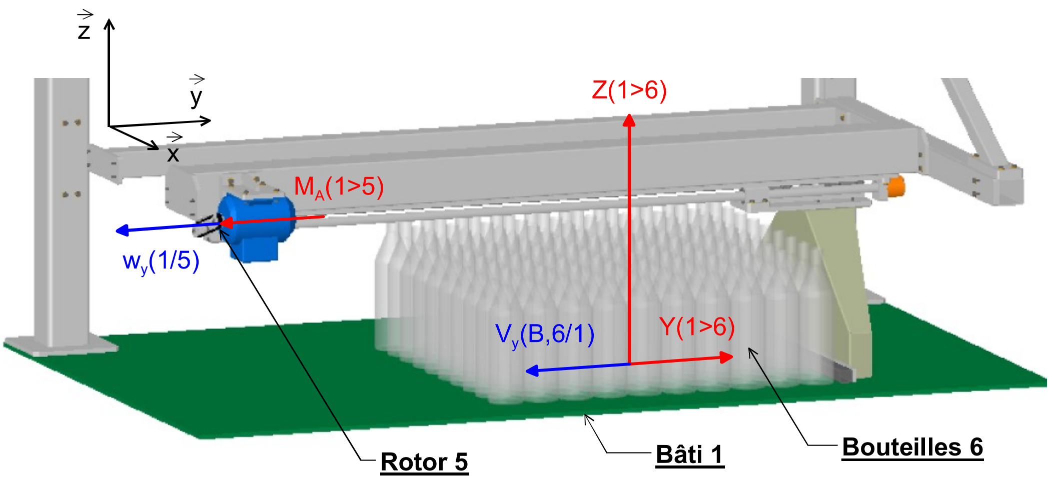
$$P(T\rightarrow S)=\{T\rightarrow S\}\circ\{S/R\}$$

Le point A est quelconque, mais doit être le même pour les 2 torseurs.

unité : Watt W = N . m / s ou N m . rad / s

Rappel sur le produit scalaire : Soient $\vec{u}:\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\vec{v}:\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}$ $\vec{u}\cdot\vec{v}=a\times d+b\times e+c\times f$

Exemple du moteur du pousseur de bouteilles :



Vitesse de rotation du moteur : N = 1250 tr/min
Pas de la vis : p = 5 mm => V(B,6/1) = - 0,104 m/s
Masse du pack de bouteilles : M = 250 kg
Coefficient de frottement tapis – bouteilles : μ = 0,1=> Y(1→6) = 245 N

1.2 Mouvement de rotation d'axe fixe

L'action du stator du moteur (lié au bâti 1) sur le rotor du moteur 5 est transmise par une liaison pivot d'axe $(A,\vec{y})$ auquel s'ajoute un couple moteur $M_A(1\rightarrow 5)$:

$$\{1\rightarrow 5\}=\left\{\begin{matrix} X(1\rightarrow 5) & L_A(1\rightarrow 5)\\ Y(1\rightarrow 5) & M_A(1\rightarrow 5)\\ Z(1\rightarrow 5) & N_A(1\rightarrow 5)\end{matrix}\right\}_A$$

Le mouvement du rotor par rapport au stator est une rotation d'axe $(A,\vec{y})$:

$$\{5/1\}=\left\{\begin{matrix} 0 & 0\\ \omega_y(5/1) & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_A$$

La puissance de l'action 1→5 est donc :

$$P(1\rightarrow 5)=\{1\rightarrow 5\}\circ\{5/1\}=\begin{pmatrix} X(1\rightarrow 5)\\ Y(1\rightarrow 5)\\ Z(1\rightarrow 5)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} L_A(1\rightarrow 5)\\ M_A(1\rightarrow 5)\\ N_A(1\rightarrow 5)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ \omega_y(5/1)\\ 0\end{pmatrix}=M_A(1\rightarrow 5)\times\omega_y(5/1)$$

Cette puissance est positive car $M_A(1\rightarrow 5)$ et $\omega_y(5/1)$ sont de même signe.

Ce résultat est souvent énoncé sous la forme $\boxed{P = C \times \omega}$ avec C en Nm et ω en rad/s.

1.3 Mouvement de Translation

L'action du tapis (bâti 1) sur les bouteilles 6 est transmise par un appui plan de normale $\vec{z}$ avec frottement. Le déplacement des bouteilles se fait selon la direction $\vec{y}$.

$$\{1\rightarrow 6\}=\left\{\begin{matrix} 0 & L_B(1\rightarrow 6)\\ Y(1\rightarrow 6) & M_B(1\rightarrow 6)\\ Z(1\rightarrow 6) & N_B(1\rightarrow 6)\end{matrix}\right\}_B$$

Le mouvement des bouteilles par rapport au tapis est une translation de direction $\vec{y}$.

$$\{6/1\}=\left\{\begin{matrix} 0 & 0\\ 0 & V_y(B,6/1)\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_B$$

La puissance de l'action 1→6 est donc :

$$P(1\rightarrow 6)=\{1\rightarrow 6\}\circ\{6/1\}=\begin{pmatrix} 0\\ Y(1\rightarrow 6)\\ Z(1\rightarrow 6)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ V_y(B,6/1)\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} L_B(1\rightarrow 6)\\ M_B(1\rightarrow 6)\\ N_B(1\rightarrow 6)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=Y(1\rightarrow 6)\times V_y(B,6/1)$$

Cette puissance est négative car $Y(1\rightarrow 5)$ et $V_y(B,5/1)$ sont de signes opposés.

Ce résultat est souvent énoncé sous la forme $\boxed{P = F \times V}$ avec F en N et V en m/s.

<u>Application numérique :</u> P(1→6) = (μ x M x g) x (N x p / 60) = 245 x - 0,104 = -25,5 W

2 Travail d'une action mécanique

2.1 Définition

Le travail de l'action T→S pendant l'intervalle de temps Δt est l'intégrale de la puissance P(T→S) au cours de cet intervalle de temps.

$$W(T \rightarrow S) = \int P(T \rightarrow S)\, dt$$

Si P(T→S) est constante pendant la durée Δt, W(T→S) = P(T→S) x Δt

unité : Joule J = W . s = N . m

2.2 Exemple du pousseur de bouteilles

Le travail du moteur s'écrit (pour M_A(1→5) = C et ω_y(5/1) = ω) :

$$W(1 \rightarrow 5) = \int C \times \omega\, dt$$

si C et ω sont constants pendant une durée Δt, ce travail vaut :

$$W(1 \rightarrow 5) = C \times \omega \times \Delta t$$

W(1→5) est positif.

Le travail du tapis s'écrit (pour Y(1→6) = F et V_y(B,6/1) = V) :

$$W(1 \rightarrow 6) = \int F \times V\, dt$$

si F et V sont constants pendant une durée Δt, ce travail vaut :

$$W(1 \rightarrow 6) = F \times V \times \Delta t$$

W(1→6) est négatif.

On peut regrouper la quantité V x Δt = D, distance parcourue pendant la durée Δt.

<u>Application numérique :</u>

P(1→6) = -25,5 W
=> que pour un déplacement D = 1,1 m
W(1→6) = -25,5 x (1,1 / 0,104) = -270 J
W(1→6) = D x F = -1,1 x 245 = -270 J

3 Énergie contenue dans un mécanisme

3.1 Différentes formes d'énergie

Une machine peut stocker de l'énergie grâce à différents systèmes : pile, ressort, réserve de fioul, contrepoids, volant d'inertie...
Elle peut recevoir ou fournir de l'énergie sous différentes formes : chaleur, action mécanique, courant électrique, rayonnement électromagnétique.

<u>Exemple du pousseur de bouteilles :</u>

Energie électrique → dans le moteur

Energie cinétique → de la vis, du pousseur et du pack de bouteilles

Chaleur dissipée lors du frottement du pack sur le tapis

3.2 Variation d'énergie due à une action mécanique

La variation d'énergie ΔE du système matériel S due à l'action mécanique T→S est égale au travail de cette action mécanique.

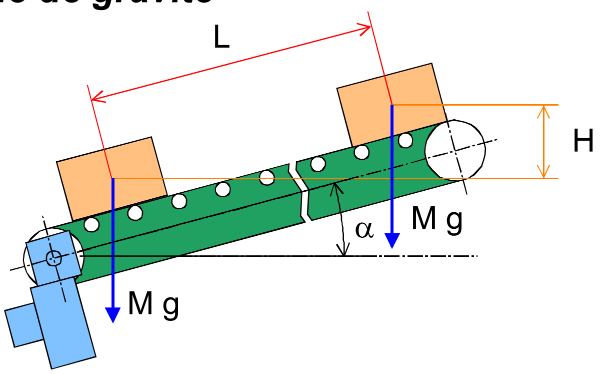
$$\Delta E = W(T \rightarrow S)$$

C'est un apport d'énergie si $W(T \rightarrow S) > 0$
C'est un retrait d'énergie si $W(T \rightarrow S) < 0$

unité : Joule J = N . m = W . s
autre unité : kilo Watt heure : 1 kWh = 3 600 000 W . s = 3 600 000 J

3.3 Travail du poids, énergie potentielle de gravité

On attribut parfois à un solide de masse M, une énergie potentielle en fonction de son altitude H. Cette énergie est égale au travail du poids lors de la chute du solide de l'altitude H à l'altitude 0.



Nous préférons quant à nous traiter le poids au même titre que les autres actions mécaniques s'exerçant sur le solide sans utiliser la notion d'énergie potentielle.

Dans le cas illustré ci-dessus, l'énergie fournie par le convoyeur pour faire monter la caisse de la hauteur H (sans variation de vitesse) doit compenser le travail du poids qui est négatif.

$$\Delta E_{caisse} = 0 = E_{convoyeur} + W(Poids \rightarrow S) \Rightarrow E_{convoyeur} = M\,g\,H$$

<u>Noter la relation trigonométrique</u> : $H = L \sin(\alpha)$

3.4 Énergie cinétique contenue dans un solide en mouvement

Solide en translation

Si S de masse M est en translation par rapport à R galiléen. Son mouvement est défini par la vitesse de son centre de gravité G $\vec{V}(G,S/R)$.
Son énergie cinétique est alors :

$$Ec=\frac{1}{2}M\,\|\vec{V}(G,S/R)\|^2$$

Solide en rotation

Si S est en rotation d'axe fixe (axe passant par son centre de gravité G) par rapport à R galiléen. Son mouvement est défini par le vecteur rotation $\vec{\Omega}(S/R)$.
Son énergie cinétique est alors :

$$Ec=\frac{1}{2}J\,\|\vec{\Omega}(S/R)\|^2$$

J est le moment d'inertie de S par rapport à son axe de rotation (en kg m²):
Exemple d'un cylindre de masse M et de rayon R : J = ½ M R²

Solide en mouvement plan

Si S est en mouvement plan par rapport à R galiléen.
Son mouvement est défini par le torseur cinématique exprimé en G :

$$\{S/R\}=_G\{\vec{\Omega}(S/R);\vec{V}(G,S/R)\}$$

Son énergie cinétique est alors :

$$Ec=\frac{1}{2}M\,\|\vec{V}(G,S/R)\|^2+\frac{1}{2}J\,\|\vec{\Omega}(S/R)\|^2$$

Solide en mouvement hélicoïdal

Si S est en mouvement hélicoïdal (axe passant par son centre de gravité G) par rapport à R galiléen.
Son mouvement est défini par le torseur cinématique exprimé en G :

$$\{S/R\}=_G\{\vec{\Omega}(S/R);\vec{V}(G,S/R)\}$$

Son énergie cinétique est alors :

$$Ec=\frac{1}{2}M\,\|\vec{V}(G,S/R)\|^2+\frac{1}{2}J\,\|\vec{\Omega}(S/R)\|^2$$

4 Rendement d'un mécanisme

4.1 Définition

La variation d'énergie d'un système matériel S au cours de sont utilisation dépend de l'énergie qu'il absorbe et qui est coûteuse pour l'utilisateur, de l'énergie qu'il fourni et qui est utile pour l'utilisateur et enfin de l'énergie perdue sans être utile à l'utilisateur.

ΔE de S =	E absorbée +	E fournie +	E perdue
	> 0	< 0	< 0

A l'heure du bilan de l'utilisation de ce système, c'est à dire après déstockage de l'énergie absorbée : ΔE = 0. On peut alors définir le rendement du système par le rapport :

$$\eta = \frac{\text{- E fournie par S (utile)}}{\text{E absorbée par S (coûteuse)}}$$

Ce rendement est sans dimension et toujours compris dans l'intervalle $0 < \eta < 1$.

Exemple d'une installation de chauffage :

$$\eta = \frac{\text{- Quantité de chaleur fournie au bâtiment lors de la saison de chauffage}}{\text{Energie contenue dans la masse de fioul achetée *}}$$

* 10,66 kWh / kg

De l'énergie est perdue lors de la combustion du fioul et lors du transport du fluide calorifique vers le bâtiment.

4.2 Rendement mécanique

Dans le cas où les énergies fournie et absorbée par le système sont mécaniques, on peut exprimer le rendement du système en fonction des travaux des actions qui s'exercent sur celui-ci.

$$\eta = \frac{\text{- W fourni par S}}{\text{W reçu par S}}$$

Exemple d'un mécanisme de montre :

$$\eta = \frac{\text{- W fourni par le mécanisme (= 0)}}{\text{W reçu lors du remontage du ressort}}$$

Toute le travail de l'utilisateur est perdu sous forme de chaleur dégagée par les frottements à l'intérieur du mécanisme. L'information fournie à l'utilisateur n'étant pas considérée comme un énergie.

4.3 Rendement mécanique en régime stationnaire

On parle de régime stationnaire lorsque l'énergie E contenue dans le système S est constante : aucune énergie n'est stockée. Cela veut dire que la vitesse de toutes les masses en mouvement est constante (pas de variation de l'énergie cinétique).

On peut alors considérer les variations par rapport au temps des énergies et faire un bilan des puissances.

0 =	P absorbée +	P fournie +	Q (chaleur)
	> 0	< 0	< 0

Le rendement s'exprime alors en fonction des puissances des actions mécaniques qui s'appliquent sur le système :

$$\eta = \frac{-\,P\ \text{fournie}}{P\ \text{absorbée}}$$

<u>Exemple du pousseur en régime stationnaire :</u>

Cas d'un rendement $\eta = 1$

$$-\,P(1\rightarrow6)\ /\ P(1\rightarrow5) = 1$$

$$F \times V\ /\ (C \times \omega) = 1$$

$$-25{,}5\ /\ (C \times \omega) = 1 \text{ avec } \omega = 131 \text{ rad / s} \Rightarrow C = 0{,}195 \text{ N m}$$

Cas d'un rendement $\eta = 0{,}9$

$$F \times V\ /\ (C \times \omega) = 0{,}9$$

$$-25{,}5\ /\ (C \times \omega) = 0{,}9 \text{ avec } \omega = 131 \text{ rad / s} \Rightarrow C = 0{,}216 \text{ N m}$$

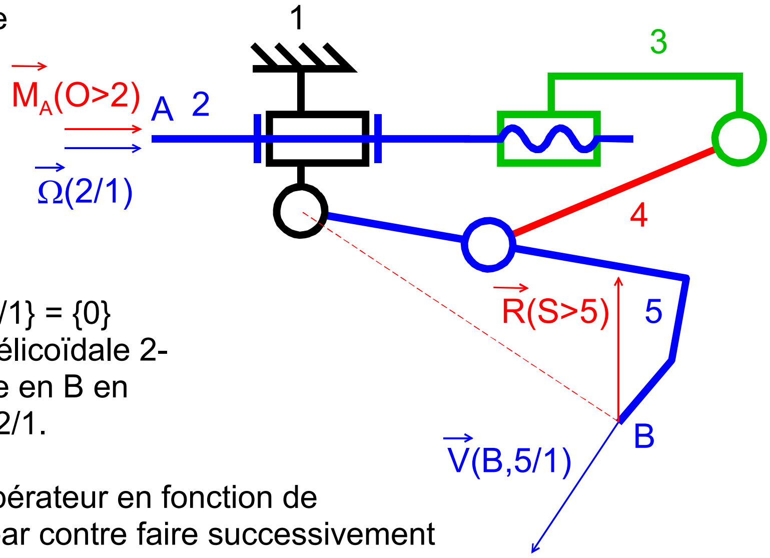
4.4 Valeur du rendement

Vous trouverez ci-dessous les valeurs indicatives des rendements des principaux systèmes de transmission de puissance.

Transmission par	Rendement	Transmission par	Rendement
Courroie plate	0,98 (glissement)	Train d'engrenages à n étages	$0{,}9^n$ à $0{,}98^n$ selon qualité
C. trapézoïdale	0,96 (mixte)		
C. crantée	0,98 (frottement)	Roue - vis	0,3 à 0,8 selon réduction
Chaîne	0,98 (frottement)		
Vis - écrou	0,10 à 0,5 selon pas	Vis à billes	0,75 à 0,95 selon pas

5 Détermination des actions grâce aux puissances

5.1 Substitution cinématique - statique



Dans un mécanisme, il est plus facile d'établir la relation entre la vitesse d'entrée et celle de sortie qu'entre les efforts à l'une et l'autre des extrémités.

Dans le mécanisme ci-contre (béquille de caravane), la fermeture cinématique {1/5} + {5/4} + {4/3} + {3/1} = {0} et les caractéristiques de la liaison hélicoïdale 2-3 permettent de déterminer la vitesse en B en fonction de la vitesse de rotation de 2/1.

Pour calculer le couple fourni par l'opérateur en fonction de l'action du sol sur la béquille, il faut par contre faire successivement 4 études d'équilibre pour les solides 5, 4, 3 et 2.

L'utilisation des puissances permet de substituer la seule étude cinématique aux 4 études d'équilibre. En effet, si on suppose que le rendement du mécanisme est η = 1, on peut écrire :

$$- P(O\rightarrow 2) / P(S\rightarrow 5) = 1$$

et donc $$-\vec{M}_A(O\rightarrow 2)\cdot\vec{\Omega}(2/1)=\vec{R}(S\rightarrow 5)\cdot\vec{V}(B,5/1)$$

comme $\vec{M}_A(O\rightarrow 2)\ et\ \vec{\Omega}(2/1)$ sont colinéaires, leur produit scalaire est égal au produit de leur norme C x ω.

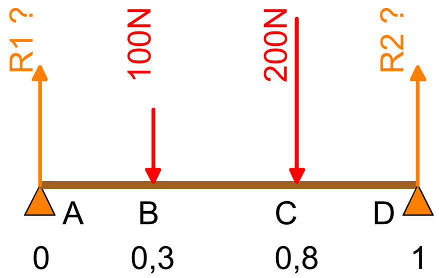
On obtient alors : $C=-\vec{R}(S\rightarrow 5)\cdot\vec{V}(B,5/1)/\omega$

L'utilisation de la puissance ne donne pas des résultats aussi complets qu'une étude de statique. On renonce à connaître les actions aux liaisons pour ne rechercher que l'action fourni par l'opérateur.

5.2 *Puissances virtuelles*

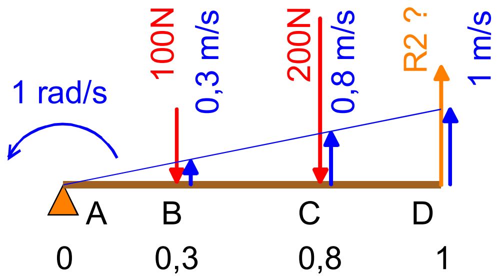
On peut utiliser le bilan des puissances pour déterminer les actions mécaniques même si le système est immobile.

Soit l'exemple d'une poutre dont on souhaite calculer la réaction aux appuis.



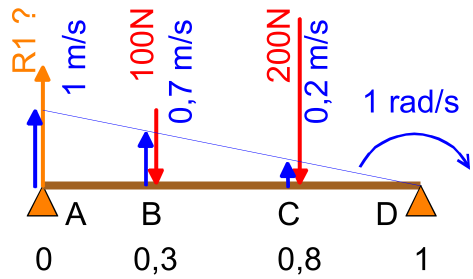
On imagine un premier mouvement de rotation autour de A. Ce mouvement génère des vitesses aux points B,C et D. Les actions qui s'y appliquent développent chacune une puissance. La somme des puissances des quatre actions qui s'exercent sur la poutre est nulle.

0 x R1 - 0,3 x 100 - 0,8 x 200 + 1 x R2 = 0 => R2 = 190 N



On imagine un deuxième mouvement de rotation autour de D. Ce mouvement génère des vitesses aux points A,B et C. Les actions qui s'y appliquent développent chacune une puissance. La somme des puissances des quatre actions qui s'exercent sur la poutre est nulle.

1 x R1 - 0,7 x 100 – 0,2 x 200 + 0 x R2 = 0 => R1 = 110 N



Les mouvements ne sont pas réels (d'où le nom de puissances virtuelles) mais doivent respecter certaines règles : ici, que la poutre est un solide indéformable.