

LE FLAMBEMENT

Comportement d'une pièce en compression

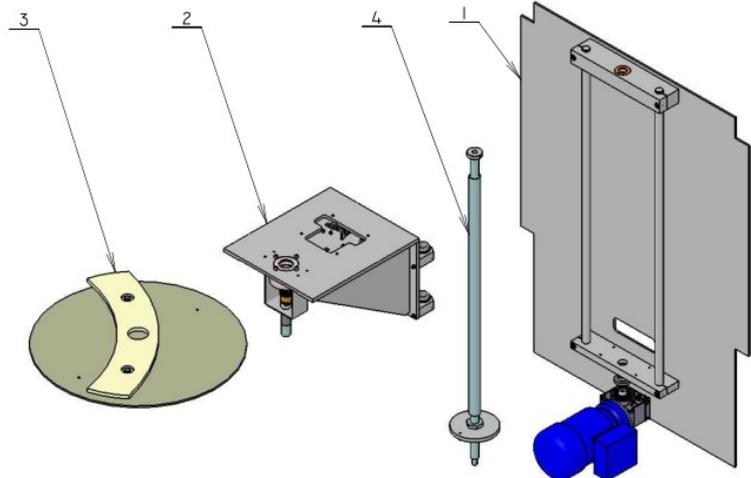
Table des matières

1 Objectif.....	2
2 Modélisation de la vis.....	2
3 Calcul en compression.....	2
4 Calcul en flambement.....	3
4.1 Hypothèses.....	3
4.2 Forme déformée de la barre.....	3
5 Contrainte critique et élancement.....	4
6 Influence des appuis.....	4
7 Evolution de la contrainte maximale.....	5
7.1 Modèle d'Euler.....	5
7.2 Modèle de Johnson.....	5
8 Cas d'une barre comprimée et fléchie.....	6

1 Objectif

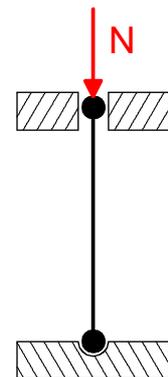
Vérifier la tenue en compression de la vis **4** qui assure la montée et la descente de l'ascenseur **2** dans une machine spéciale destinée à manipuler des planches d'étiquettes, étiquettes qui sont disposées sur le plateau **3** (voir vue éclatée ci-contre).

Cette vis est guidée dans le bâti **1** à chaque extrémité par des coussinets. Elle soulève l'ascenseur qui est muni d'un écrou et qui est guidé en translation verticale par rapport au bâti.



2 Modélisation de la vis

On modélise la vis par une barre, libre en rotation à chacune de ses extrémités car les paliers qui la guident sont modélisés par une rotule en bas et une linéaire annulaire en haut. Elle est soumise à un effort de compression axial du au poids de l'ascenseur, effort transmis par l'écrou. Cet effort est appliqué tout en haut de la vis (cas le plus défavorable). On néglige le poids propre de la vis.



3 Calcul en compression

La forme du tenseur de cohésion est :

$\{ Coh \} = \{ N, 0, 0 ; 0, 0, 0 \}$ avec $N < 0$ (compression)

La contrainte supportée par chaque section de la barre est :

$$\sigma_c = N / S$$

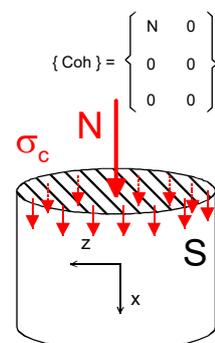
Elle doit rester inférieure à R_e , la limite élastique du matériau.

Application numérique :

pour $R_e = 330 \text{ Mpa}$ et $D = 13,5 \text{ mm}$

La charge maximum que peut supporter la vis (sans coefficient de sécurité) est :

$$N_{\text{maxi}} = 330 \times (\pi/4 \times 13,5^2) = 47\,200 \text{ N}$$



4 Calcul en flambement

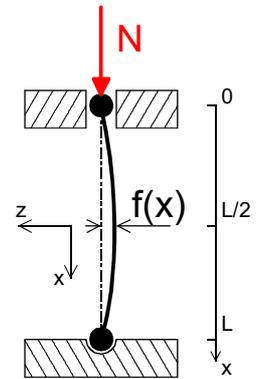
4.1 Hypothèses

On suppose que la barre est légèrement courbée. L'action de compression N engendre alors un moment de flexion qui dépend de l'écart entre la barre et la droite d'action.

Le torseur de cohésion au point d'abscisse x est modifié de la façon suivante :

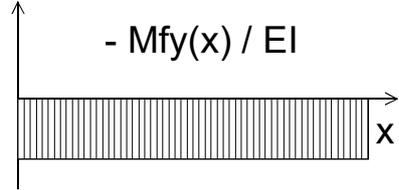
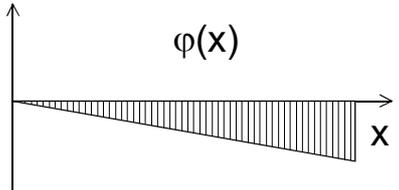
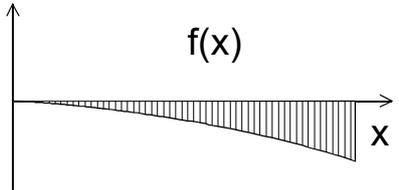
$$\{ \text{Coh} \} = \{ N, 0, 0 ; 0, M_{fy}(x), 0 \} \text{ avec } M_{fy}(x) = N f(x)$$

$f(x)$ étant la flèche au point d'abscisse x .



4.2 Forme déformée de la barre

Les relations issues de la théorie des poutres dans le cas général de la flexion sont :

Le moment de flexion $M_{fy}(x)$ est proportionnel à la dérivée de la pente $\varphi(x)$: $- M_{fy}(x)/EI = \varphi(x)'$	La pente $\varphi(x)$ est la dérivée de la flèche $f(x)$: $\varphi(x) = f(x)'$	(exemple d'une poutre encastree) 
		

La relation entre $M_{fy}(x)$ et $f(x)$ vue au § précédent ($M_{fy}(x) = N f(x)$) conduit à une équation différentielle :

$$f(x)'' = \varphi(x)' = - M_{fy}(x) / EI = - N f(x) / EI \Rightarrow f(x)'' + N / EI f(x) = 0$$

La solution de cette équation différentielle est de la forme :

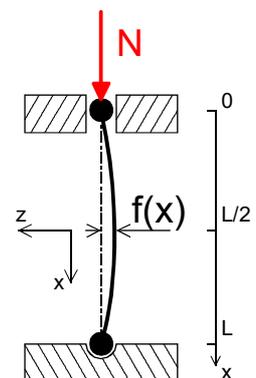
$$f(x) = A \sin \left(\left(\frac{N}{EI} \right)^{1/2} x \right) + B \cos \left(\left(\frac{N}{EI} \right)^{1/2} x \right)$$

Or $f(0) = 0$ donc $B = 0 \Rightarrow$ Il vient $f(x) = A \sin \left(\left(\frac{N}{EI} \right)^{1/2} x \right)$

Comme $f(L) = 0$, $\sin \left(\left(\frac{N}{EI} \right)^{1/2} L \right) = 0$ donc $\left(\frac{N}{EI} \right)^{1/2} L = \pi$

La charge N qui déclenche la courbure sinusoïdale de la barre est donc

$$N = \pi^2 EI / L^2$$



Avec E module d'Young du matériau et I moment quadratique de flexion de la section.

Application numérique : $E = 210\,000$; $L = 600$ mm ; $I = 1630$ mm⁴ $\Rightarrow N_{\text{euler}} = 9\,380$ N

La charge maximale à ne pas dépasser est très inférieure à celle trouvée au § 3 !

5 Contrainte critique et élancement

La charge critique d'Euler N_e correspond à la contrainte critique $\sigma_e = N_e / S$

$$\sigma_e = \pi^2 E I / (L^2 S)$$

On pose $\lambda = (L^2 S / I)^{1/2}$. C'est une caractéristique de la pièce appelée « élancement » (sans dimension).

$$\sigma_e = \pi^2 E / \lambda^2$$

Application numérique dans le cas de l'ascenseur :

$$L = 600 \text{ mm}$$

$$S = 143 \text{ mm}^2 \text{ (section de la vis = } \pi D^2/4 \text{)}$$

$$I = 1630 \text{ mm}^4 \text{ (moment quadratique de flexion de la vis = } \pi D^4/64 \text{)}$$

$$\Rightarrow \lambda = (600^2 \times 143 / 1630)^{1/2} = 178$$

$$\sigma_e = 9380 / 143 = 65,6 \text{ MPa}$$

Pour la vis, le risque n'est donc pas la déformation plastique mais le flambage. La contrainte à ne pas dépasser n'est pas la limite élastique mais la contrainte critique. C'est le cas pour toutes les pièces élancées lorsqu'elles sont soumises à de la compression.

6 Influence des appuis

Le maintien de la barre à chaque extrémité influence sa tendance à flamber.

On considère la longueur « libre » de flambement

$$L' = K \times L.$$

Entre-appuis : $L' = L \Rightarrow \sigma_e = \pi^2 E / \lambda^2$

Bi-encastree : $L' = 1/2 L \Rightarrow \sigma_e = 4 \pi^2 E / \lambda^2$

(barre 4 fois moins sujette au flambement)

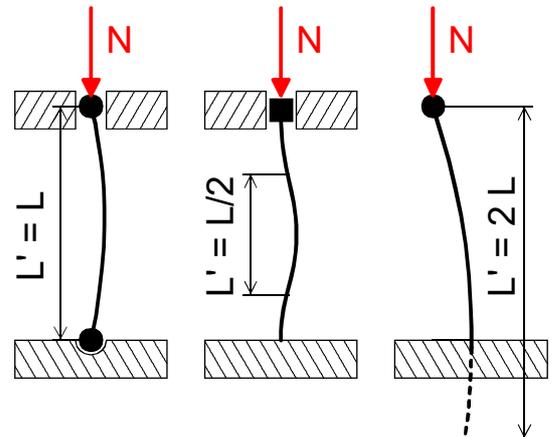
Encastrement simple : $L' = 2 L \Rightarrow \sigma_e = 1/4 \pi^2 E / \lambda^2$

(barre 4 fois plus sujette au flambement)

Application numérique dans le cas de l'ascenseur :

Vis encastree à une extrémité et libre à l'autre (elle est guidée par un seul pivot à la base) : $N_e = 9\,380 / 4 = 2\,350 \text{ N}$

Vis encastree à chaque extrémité (les deux paliers d'extrémité sont modélisés par des pivots) : $N_e = 9\,380 \times 4 = 37\,500 \text{ N}$



7 Evolution de la contrainte maximale

7.1 Modèle d'Euler

Avec le modèle d'Euler : $\sigma_{\max} = \min (R_e, \sigma_e)$

Pour λ petit, c'est la limite R_e qui prévaut (compression).

Pour λ plus grand que l'élanement critique, c'est la limite σ_e qui prévaut (flambement).

Dans le cas d'une barre entre deux appuis :

$$\sigma_e = R_e \Rightarrow R_e = \pi^2 E / \lambda^2 \Rightarrow \lambda^2 = \pi^2 E / R_e$$

$$\lambda_{\text{critique}} = (\pi^2 E / R_e)^{1/2}$$

Dans le cas d'une barre bi-encastée :

$$\sigma_e = R_e \Rightarrow R_e = 4 \pi^2 E / \lambda^2 \Rightarrow \lambda^2 = 4 \pi^2 E / R_e$$

$$\lambda_{\text{critique}} = 2 (\pi^2 E / R_e)^{1/2}$$

Application numérique dans le cas de l'ascenseur :

- Vis entre appuis (les deux paliers d'extrémité sont modélisés par des rotules) :

Élanement critique : $\lambda_{\text{critique}} = (\pi^2 E / R_e)^{1/2} = 79,5 < \text{élanement de la vis (178)}$.

Longueur critique $L_{\text{critique}} = (\lambda_{\text{critique}}^2 \times I / S)^{1/2} = 134 \text{ mm}$

- Vis bi-encastée (les deux paliers d'extrémité sont modélisés par des pivots) :

Élanement critique : $\lambda_{\text{critique}} = 2 (\pi^2 E / R_e)^{1/2} = 159 < \text{élanement de la vis (178)}$.

Longueur critique $L_{\text{critique}} = (\lambda_{\text{critique}}^2 \times I / S)^{1/2} = 535 \text{ mm}$

7.2 Modèle de Johnson

En pratique, les deux limites R_e et σ_e se raccordent de façon progressive. Plusieurs modèles existent pour traiter des barres peu élanées. Le modèle de Johnson est le plus facile à mettre en œuvre.

Pour $\sigma_e < 0,5 R_e$ c'est la limite σ_e qu'il ne faut pas dépasser.

Pour $\sigma_e > 0,5 R_e$ c'est la limite

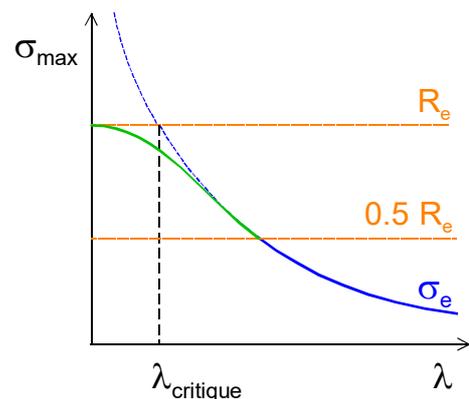
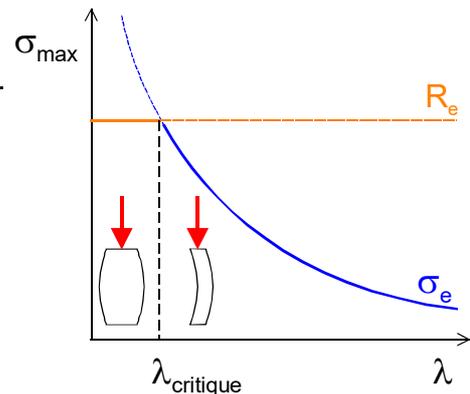
$$\sigma_{\max} = R_e (1 - 1/4 R_e / \sigma_e)$$

qu'il ne faut pas dépasser.

Application numérique dans le cas de l'ascenseur :

vis bi-encastée : $R_e = 330$; $\sigma_e = 262$ supérieure à $R_e / 2$

$\sigma_{\max} = 226 \text{ MPa}$; $N_{\max} = 32\,330 \text{ N}$



8 Cas d'une barre comprimée et fléchie

Lorsque l'action qui s'exerce sur la barre est décentrée, l'effort de compression N s'accompagne d'un moment de flexion M_{fy} qui dépend de la distance d entre la barre et la droite d'action.

Le torseur de cohésion est le suivant :

$$\{ Coh \} = \{ N, 0, 0 ; 0, M_{fy}, 0 \} \text{ avec } M_{fy} = N d$$

La contrainte normale maximale dans une section quelconque de la barre est (sans flambement) :

$$\sigma_{max} = N / S + M_{fy} e / I = N / S + (N d) e / I$$

avec S , I et e : la section, le moment quadratique et la distance à la fibre neutre de la poutre.

On prend en compte l'effet de l'instabilité liée au flambement, en majorant le terme lié à la flexion du facteur $1/\cos(u)$.

$$\text{avec } u = \pi/2 (N / N_e)^{1/2}$$

$$\sigma_{max} = N / S + 1 / \cos(u) \times (N d) e / I$$

On vérifie la tenue de la barre lorsque $\sigma_{max} < R_e$

Application numérique :

Dans le cas d'une barre de mêmes dimensions que la vis entre appuis :

$$L = 600 \text{ mm}$$

$$S = 143 \text{ mm}^2 \text{ (section de la vis = } \pi D^2/4)$$

$$I = 1630 \text{ mm}^4 \text{ (moment quadratique de flexion de la vis = } \pi D^4/64)$$

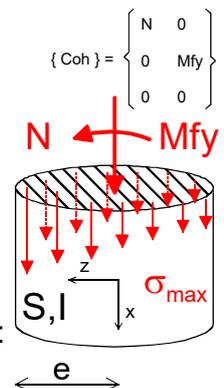
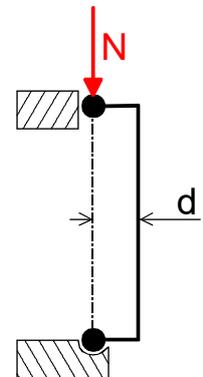
$$d = 40 \text{ mm}$$

$$\text{La résolution de l'équation } R_e = N / S + 1/\cos(\pi/2 (N / N_e)^{1/2}) \times (N d) e / I$$

$$\text{c'est à dire } 330 = N/143 + 1/\cos(\pi/2 (N / 9380)^{1/2}) \times (N \times 40 \times 6,75) / 1630$$

$$\text{donne } N = 1550 \text{ N}$$

C'est encore plus faible que le résultat donné par Euler ! L'excentration de la charge favorise très rapidement le flambement de la barre.



9 Conclusion

Le flambement, contrairement à la déformation plastique est un phénomène brutal. Plus la pièce se déforme et moins elle oppose de résistance. C'est un phénomène très dangereux pour les structures mécaniques. Dans un

mécanisme, il faut donc repérer toutes les pièces en compression, leur donner un faible élancement et s'assurer que la charge qu'elles subissent est bien centrée sur leur axe.

