

# LA FLEXION

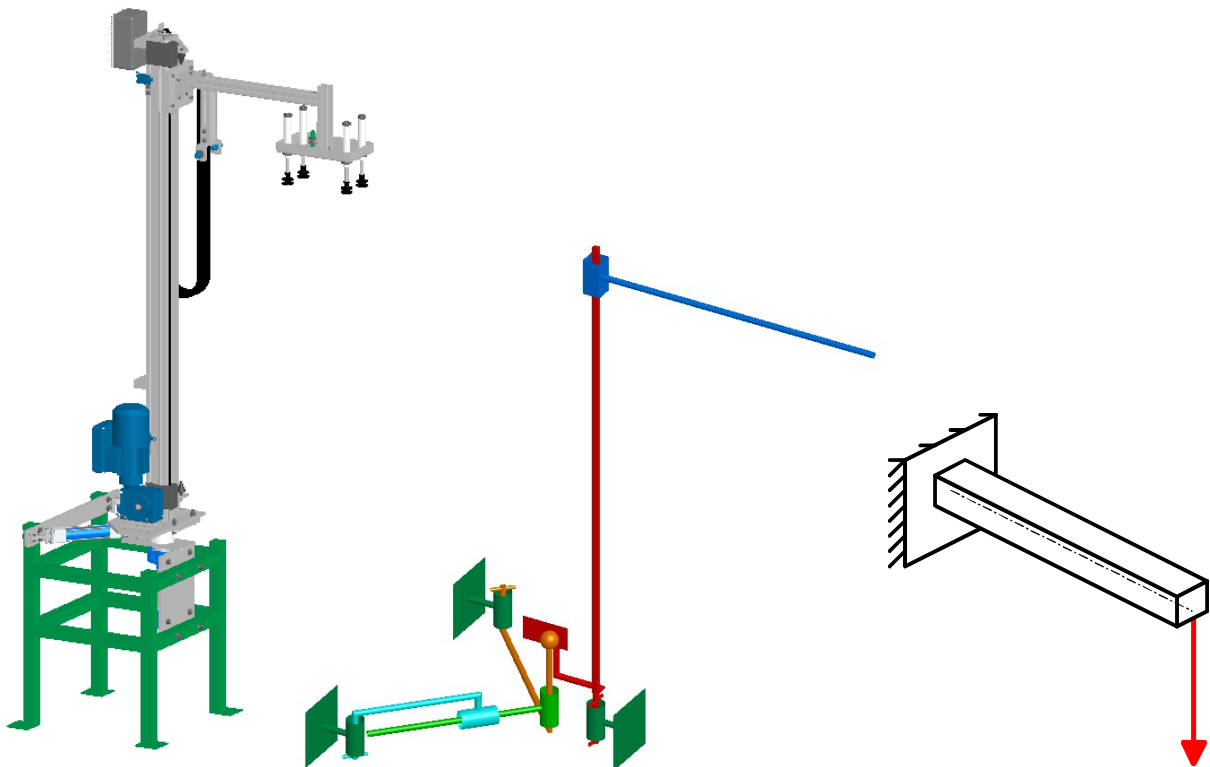
## Comportement d'une pièce en flexion

### Table des matières

1 Modélisation de la poutre.....	2
2 Action de cohésion.....	3
3 Déformation et contrainte locale dans une section.....	4
4 Modèle de répartition des contraintes.....	5
5 Déformation globale de la poutre.....	6
6 Calcul de la flèche.....	7
6.1 Triple intégration.....	7
6.2 Utilisation d'un formulaire.....	7
6.3 Extensions du formulaire.....	8
6.3.1 Principe de superposition.....	8
6.3.2 Problèmes hyperstatiques.....	8
6.3.3 Principe de réciprocité (de Maxwell Betty).....	8
6.3.4 Discrétisation des charges réparties.....	9
6.3.5 Symétrie.....	9
6.4 Calcul par éléments finis.....	10
6.4.1 Principe.....	10
6.4.2 Logiciels.....	10

## 1 Modélisation de la poutre

On considère le bras d'un manipulateur de caisses en carton. Du point de vue cinématique, le bras est lié au mat du manipulateur par une liaison glissière. Pour l'étude de son comportement sous charge, on suppose qu'il est encasturé à une extrémité et chargé à l'autre par une force ponctuelle. On néglige son poids.



Ce cas de charge « poutre encasturée à une extrémité et chargée ponctuellement à l'autre » se rencontre très fréquemment au même titre qu'une « poutre entre-appuis chargée ponctuellement en son milieu ».

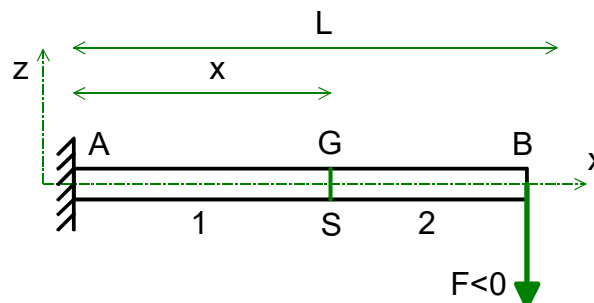
## 2 Action de cohésion

La forme du torseur de cohésion est :

$$\{\text{Coh}\} = \{2 \rightarrow 1\} = \{(0, 0, T_z) \quad (0, M_{fy}, 0)\}$$

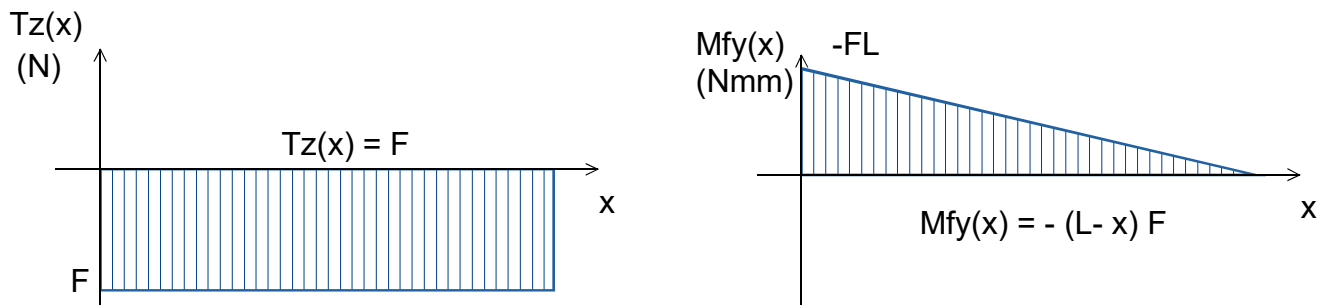
C'est une sollicitation de flexion simple.

Le cas où  $\{\text{Coh}\} = \{2 \rightarrow 1\} = \{(0, 0, 0) \quad (0, M_{fy}, 0)\}$  serait un cas de flexion pure.



Dans le cas général, l'effort tranchant  $T_z$  et le moment fléchissant  $M_{fy}$  ne sont pas constants le long de la poutre.

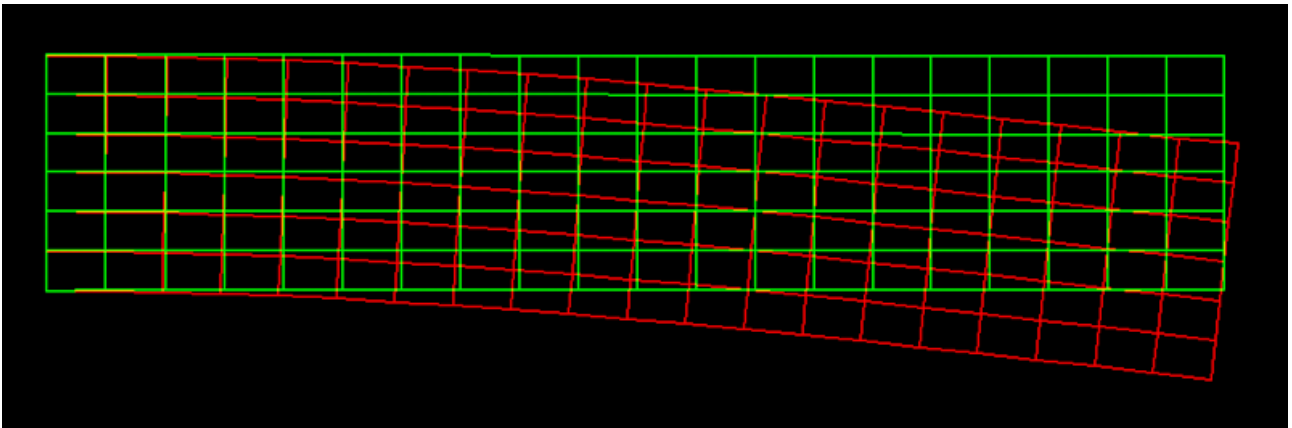
Dans notre cas,  $T_z$  est constant  $T_z = F$  ( $F < 0$ ) et  $M_{fy} = -(L - x) T_z$  ( $M_{fy} > 0$ ).  
 C'est l'équilibre de la moitié 1 de la poutre qui nous permet de les déterminer.



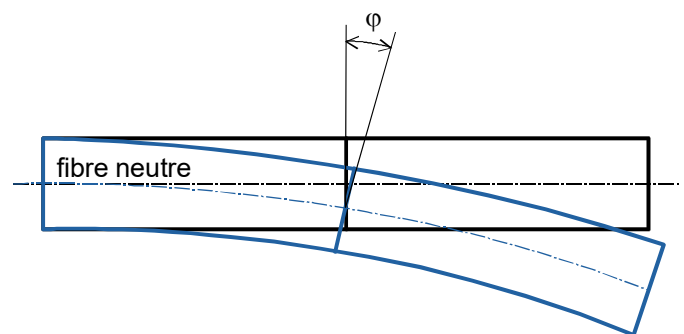
La section la plus sollicitée de la poutre est celle où  $M_{fy}$  est maximum en valeur absolue.  
 Dans notre cas cette section se situe au niveau de l'encastrement.  
 A cet endroit  $M_{fy} = -F \times L$

### 3 Déformation et contrainte locale dans une section

On constate expérimentalement les phénomènes suivants :



Les sections ne se déforment pas (elles restent planes).  
 Leur centre de gravité se déplace selon  $z$ .  
 Elles tournent d'un angle  $\varphi$  autour de  $y$ .  
 Elles restent  $\perp$  à la fibre neutre (ligne centrale de la poutre).



Cela se vérifie tant que :

La déformation est de faible amplitude.

L'effet de Tz reste négligeable devant celui de  $M_y$  (pièce longue).

La section est symétrique par rapport au chargement (celui-ci n'induit aucune torsion).

Alors, dans un tronçon de longueur 1 mm, un point P situé à l'altitude  $z$  de la fibre neutre se déplace de :

$$\Delta x = z \Delta \varphi$$

$\Delta \varphi$  étant la différence d'angle  $\varphi$  aux deux extrémités du tronçon.

La déformation du tronçon à cet endroit est :

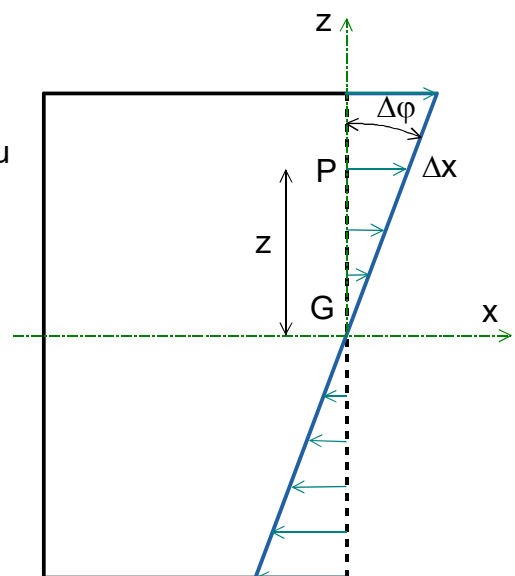
$$\varepsilon = \Delta x / 1 = z \Delta \varphi$$

Cette déformation engendre une contrainte normale :

$$\sigma = E \varepsilon = E z \Delta \varphi$$

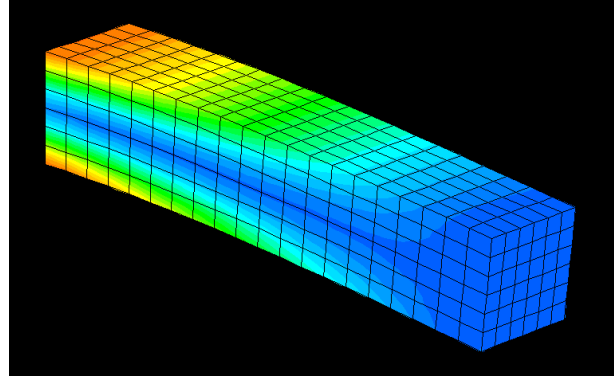
avec  $E$  le module d'Young du matériau

La contrainte en P est une contrainte normale (voir traction – compression) proportionnelle à la distance  $z$  à la fibre neutre.



## 4 Modèle de répartition des contraintes

L'effort n'est donc pas supporté uniformément par la matière.  $\sigma$  est nulle à l'extrémité de la poutre et maximale à l'encastrement, nulle dans le plan neutre et maximale sur les faces inférieure (compression) et supérieure (traction) de la poutre.



L'intégrale sur la section S des moments élémentaires engendrés par la contrainte  $\sigma$  correspond au moment de flexion  $M_{fy}$  qui engendre le  $\Delta\varphi$  du tronçon considéré.

$$M_{fy} = \int_S \sigma z \, dS = \int_S E \Delta\varphi z^2 \, dS = E \Delta\varphi \int_S z^2 \, dS \\ = E \Delta\varphi \left[ \int_{-B/2}^{+B/2} \int_{-H/2}^{+H/2} z^2 \, dy \, dz \right]$$

En posant  $\left[ \int_{-B/2}^{+B/2} \int_{-H/2}^{+H/2} z^2 \, dy \, dz \right] = I_y$   
 moment quadratique de flexion de la section (en  $\text{mm}^4$ ),

on obtient :  $M_{fy} = E \Delta\varphi I_y$       ou       $\Delta\varphi = M_{fy} / (E I_y)$

Pour un rectangle de hauteur H et de largeur B

$$I_y = B H^3 / 12$$

La contrainte maximale se rencontre sur les bords inférieur (compression) et supérieur (traction) de la section.

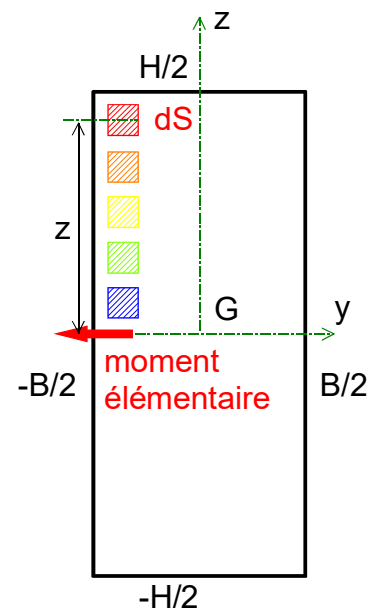
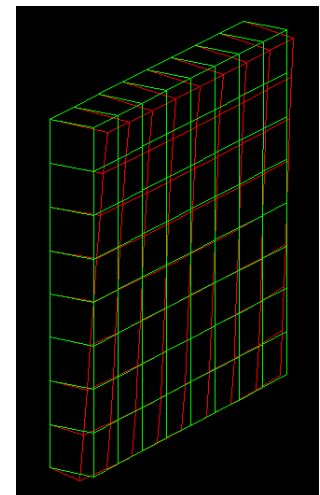
$$\|\sigma_{\max}\| = E \Delta\varphi H/2 = M_{fy} (H/2) / I_y$$

Ce modèle est valable pour les poutres droites de section symétrique par rapport aux charges.

Pour des sections complexes, il faut adopter un coefficient de concentration de contrainte.

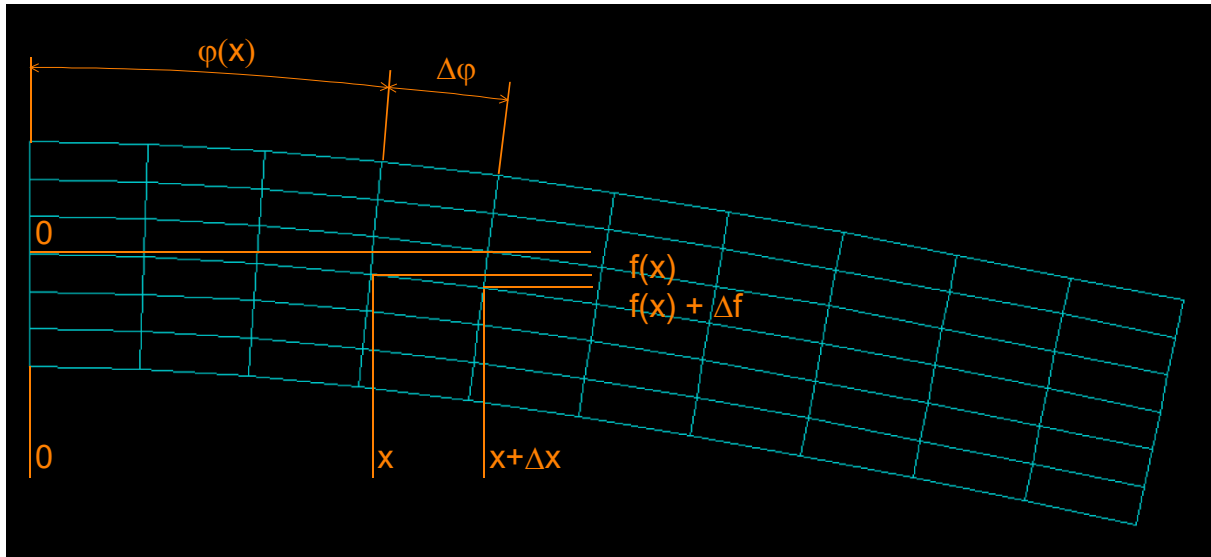
Dans notre cas, la contrainte maximum à comparer à la limite élastique du matériau est

$$\sigma_{\max} = F L (H/2) / (B H^3 / 12)$$



## 5 Déformation globale de la poutre

La déformation globale de la poutre dépend de la déformation de chaque tronçon élémentaire.



L'angle  $\varphi(x)$  étant petit, on l'assimile à la pente de la fibre neutre en  $x$ .

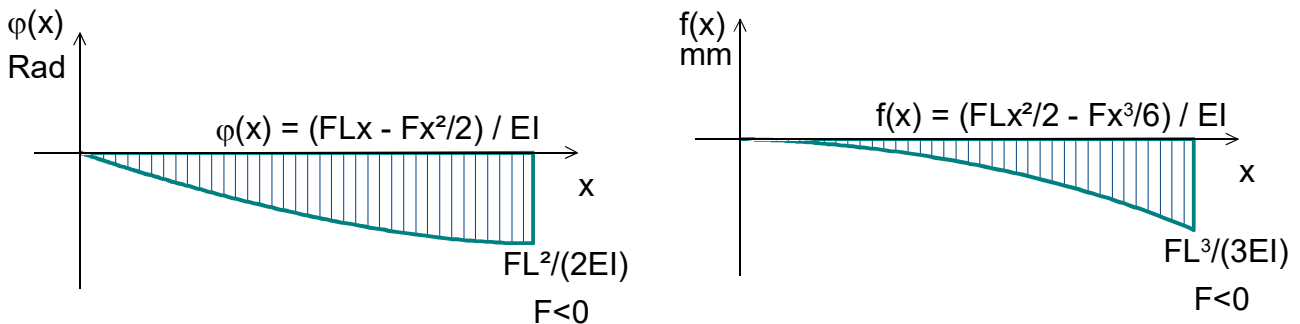
On appelle  $f(x)$ , la flèche en  $x$ , c'est à dire le déplacement vertical du centre de la section lors de la déformation.  $\Delta f$  est le décalage entre les deux bouts du tronçon de longueur  $\Delta x$ .

On a la relation :  $\Delta f = \varphi(x) \Delta x$  Inversement  $f(x) = \int_0^x \varphi(u) du$

On appelle  $\Delta\varphi$ , la différence de pente entre les deux bouts du tronçon de longueur  $\Delta x$ .  $\Delta\varphi$  est différent pour chaque tronçon car il dépend du moment de flexion  $M_f(y(x))$  qui dans notre exemple est maximal à l'encastrement et nul à l'extrémité :

$\Delta\varphi = M_f(y(x)) / (E I_y)$  Inversement  $\varphi(x) = \int_0^x M_f(y(u)) / (E I_y) du$

Cette double intégration donne, dans notre exemple, les diagrammes suivants pour la pente et la flèche :



Dans notre exemple, la flèche à l'extrémité du bras est  $f = F L^3 / ( 3 E (BH^3/12))$

## 6 Calcul de la flèche

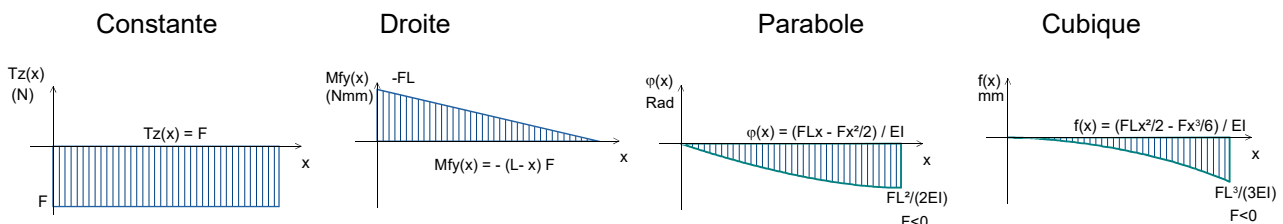
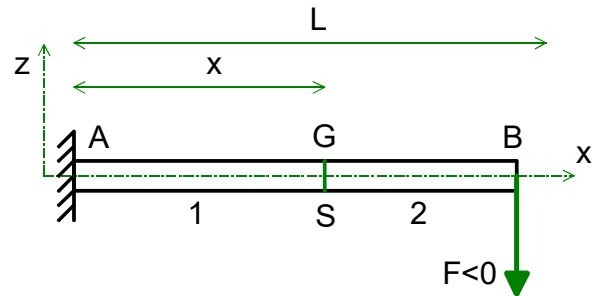
### 6.1 Triple intégration

L'effort tranchant se calcule le long de la poutre par l'équilibre de la partie 1 de celle-ci.

L'intégration de l'effort tranchant le long de la poutre donne l'évolution du moment fléchissant. Le signe dépend du repère utilisé. La constante d'intégration est déterminée par le fait que  $M_{fy}$  est nul à l'extrémité de la poutre (dans notre exemple).

L'intégration du moment fléchissant donne l'évolution de la pente. La constante d'intégration est déterminée par le fait que  $\varphi$  est nulle à l'encastrement.

L'intégration de la pente donne l'évolution de la flèche. La constante d'intégration est déterminée par le fait que  $f$  est nulle à l'encastrement.



Cette méthode permet de déterminer la déformée complète de la poutre dans toutes les configurations. Elle est très fastidieuse.

### 6.2 Utilisation d'un formulaire

Les cas les plus courants sont répertoriés dans des formulaires qui donnent le moment de flexion maximum, la pente et la flèche maximale en fonction de la longueur de la poutre, de son moment quadratique et de la charge.

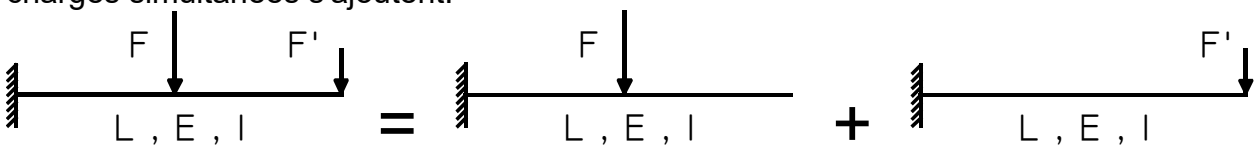
Modèle (dans le plan x,z)	Effort tranchant $T_z$	Moment fléchissant $M_{fy}$	Pente de la déformée $\varphi$	Déformée (flèche) $f$

### 6.3 Extensions du formulaire

Ces formulaires, aussi complets soient-ils ne peuvent pas répertorier tous les cas. Quelques principes permettent de ramener un exemple compliqué à un cas simple du formulaire.

#### 6.3.1 Principe de superposition

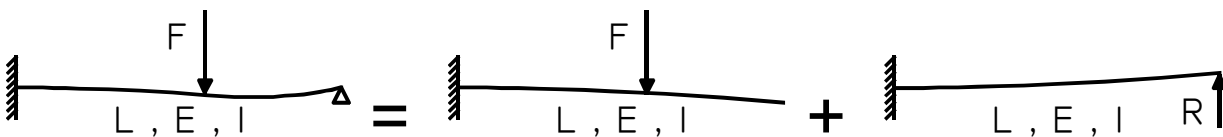
Les efforts tranchants, moments fléchissants, pentes et déformées induits par deux charges simultanées s'ajoutent.



#### 6.3.2 Problèmes hyperstatiques

Dans l'exemple ci-dessous, l'équilibre de la poutre ne permet pas de calculer la réaction au niveau de l'appui d'extrémité (hyperstatisme).

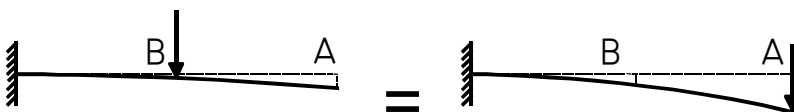
On calcule la flèche  $f$  à l'extrémité de la poutre, sous la charge  $F$  en enlevant préalablement l'appui.



On en déduit  $R$  qui est l'effort permettant d'obtenir  $-f$ . C'est la réaction de l'appui.

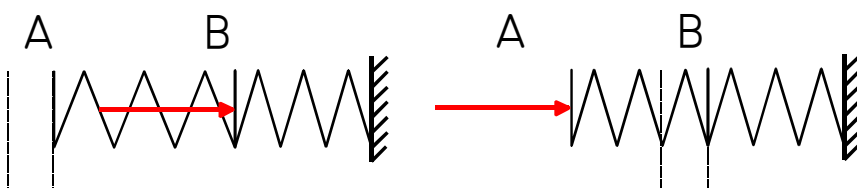
#### 6.3.3 Principe de réciprocité (de Maxwell Betty)

La flèche en A produite par l'effort placé en B est égale à la flèche en B produite par l'effort placé en A.



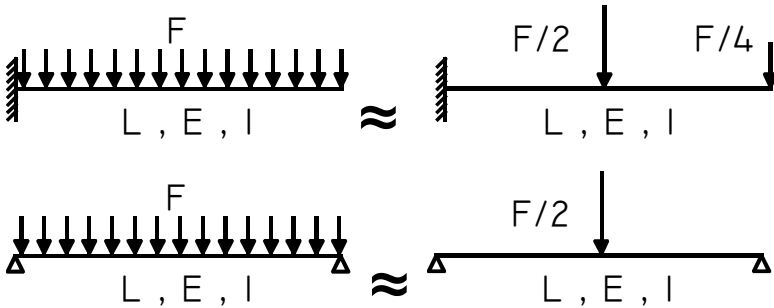
Le calcul de la flèche au milieu de la poutre encastree se ramène au calcul de la flèche à l'extrémité si la charge est située au milieu.

Cette propriété étonnante à première vue, se vérifie aisément pour le cas de deux ressorts en série soumis à un effort de compression.



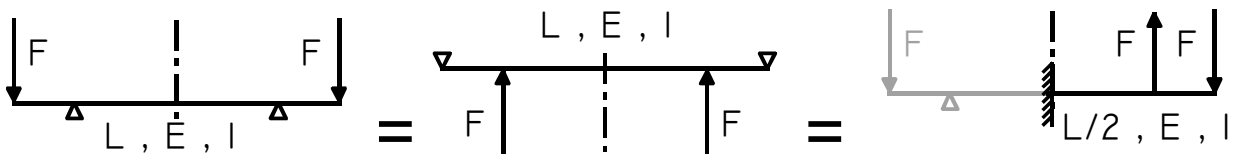
### 6.3.4 Discrétisation des charges réparties

Moyennant une erreur pouvant aller jusqu'à 10 %, on peut remplacer une charge répartie tout au long de la poutre (exemple poids propre) par des charges ponctuelles placées en son milieu et à son extrémité.



### 6.3.5 Symétrie

La poutre ci-dessous à gauche, placée sur deux appuis et chargée à ses deux extrémités, se déformera de la même manière que la poutre dessinée au centre. La moitié droite de cette dernière se déformera de la même manière que si elle était encastree.



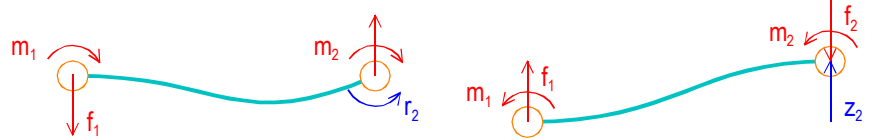
## 6.4 Calcul par éléments finis

### 6.4.1 Principe

La poutre est découpée en un certain nombre de tronçons appelés éléments. Le point à la jonction de deux éléments est appelé un noeud. Chaque noeud possède quelques degrés de liberté : dans notre exemple le déplacement vertical « z » et la rotation selon y « r ».

On établit la matrice de rigidité de l'élément, en calculant les efforts de réaction de ce dernier lorsqu'on lui impose les déplacements des noeuds (il réagit à la manière d'un ressort).

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ m_1 \\ f_2 \\ m_2 \end{pmatrix} = EI / L^3 \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ r_1 \\ z_2 \\ r_2 \end{pmatrix}$$



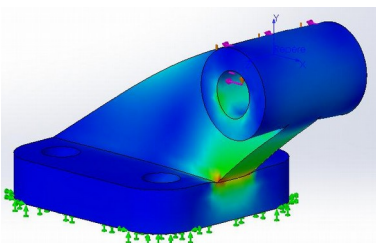
En concaténant les matrices de rigidité des éléments (le noeud de droite de l'élément 1 étant le noeud de gauche de l'élément 2) on obtient la matrice de rigidité de la poutre complète.

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \dots \\ \dots \\ f_4 \\ \dots \\ m_4 \end{pmatrix} = EI / L^3 \begin{bmatrix} 12 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ \dots \\ z_4 \\ \dots \\ r_4 \end{pmatrix}$$

L'inversion de cette matrice permet de calculer les déplacements en fonction des efforts. On impose certains déplacements (conditions aux limites) exemple  $f_1 = r_1 = 0$  pour l'encastrement. On introduit le cas de charge  $f_4 = -F$  pour la charge ponctuelle à l'extrémité. La matrice de rigidité inverse permet alors de calculer le déplacement et la rotation de chaque noeud.

### 6.4.2 Logiciels

De la même manière, on peut utiliser des coques (éléments triangulaires à 3 noeuds) ou des volumes (éléments cubiques à 8 noeuds). Seul l'ordinateur permet alors le calcul.



Les logiciels de CAO possèdent tous un module de calcul par éléments finis (Solidwork Simulation) qui réalise une discrétisation (maillage) automatique de la pièce en éléments volumiques (tétraèdres).

Pour des ensembles plus grands (bati mécano-soudé) il est préférable d'utiliser un logiciel de calcul (RDM6, LISA, CASTEM) qui permettra d'optimiser le type d'élément (poutre, coque) afin de réduire le temps de calcul.

